Теория рядов

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Решение задачи, представленной в математических терминах, например, в виде комбинации различных функций, их производных и интегралов, нужно уметь "довести до числа", которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны различные методы.

Раздел математики, позволяющий решить любую корректно поставленную задачу с достаточной для практического использования точностью, называется теорией рядов.

Даже если некоторые тонкие понятия математического анализа появились вне связи с теорией рядов, они немедленно применялись к рядам, которые служили как бы инструментом для испытания значимости этих понятий. Такое положение сохраняется и сейчас.

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

где $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_i; \ldots$ - члены ряда; u_n - *n-ый* или общий член ряда, называется бесконечным рядом (рядом).

Если члены ряда :

- числа, то ряд называется числовым;
- числа одного знака, то ряд называется знакопостоянным;
- числа разных знаков, то ряд называется знакопеременным;
- положительные числа, то ряд называется знакоположительным;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется знакочередующимся;
- функции, то ряд называется функциональным;
- степени x, то ряд называется степенным;
- тригонометрические функции, то ряд называется тригонометрическим.

I. Числовой ряд

1.1. Основные понятия числового ряда.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$S_1 = u_1,$
$S_2 = u_1 + u_2,$
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$

…………..

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$,

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Если при бесконечном возрастании номера *n* частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = S$.

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S$$.

Если частичная сумма S_n ряда (1.1) при неограниченном возрастании *n* не имеет конечного предела (стремится к $+\infty$ или $-\infty$), то такой ряд называется ***расходящимся***.

Если ряд ***сходящийся***, то значение S_n при достаточно большом ***n*** является приближенным выражением суммы ряда *S*.

Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

1.2. Примеры числовых рядов.

Пример 1. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (1.2)$$

называется ***геометрическим*** $(a \neq 0)$.

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых *n* членов $S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$. Очевидно: это *n*-ая частичная сумма ряда (1.2).

Возможны случаи:

$|q| = 1$:

$q = 1$.

Ряд (1.2) принимает вид:

$a + a + a + \ldots + a = a \cdot n = S_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot n = \infty$, ряд расходится;

$q = -1$

Ряд (1.2) принимает вид:

$a - a + a - a + \ldots$,

$$S_n = \begin{cases} a & при \quad n \quad нечетном \quad (n = 2k+1), \\ 0 & при \quad n \quad четном \quad (n = 2k). \end{cases}$$

S_n не имеет предела, ряд расходится.

$|q| < 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$ - конечное число, ряд сходится.

$|q| > 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \infty$ - ряд расходится.

Итак, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 2. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \quad (1.3)$$

называется ***гармоническим***.

Запишем частичную сумму этого ряда:

$$S_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots.$$

Сумма S_n больше суммы, представленной следующим образом:

$$S_n > \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

или $S_n > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$.

Если $n \to \infty$, то $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots \to \infty$, или $S_n = 1+\frac{1}{2}(n-1) \to \infty$.

Следовательно, если $n \to \infty$, то $S_n \to \infty$, т.е. гармонический ряд расходится.

Пример 3. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \quad (1.4)$$

называется ***обобщенным гармоническим***.

Если $p = 1$, то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если $p < 1$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При $p > 1$ имеем геометрический ряд, в котором $|q| < 1$; он является сходящимся.

Итак, обобщенный гармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

1.3. Необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***может сходиться только при условии, что его общий член*** u_n ***при неограниченном увеличении номера*** n ***стремится к нулю:*** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$**.**

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$***, то ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***расходится*** – это достаточный признак расходимости ряда.

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \quad (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Упражнения.

Записать ряд по его заданному общему члену:

$u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$;

$u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$;

$u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

Решение.

Полагая $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$,…, имеем бесконечную последовательность чисел:

$u_1 = \dfrac{2}{3}$, $u_2 = \dfrac{3}{4}$, $\cdots$. Сложив его члены, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{n+1}{2^n} + \ldots$$

Поступая так же, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n-1}=\frac{3}{1}+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+\ldots+\frac{n+2}{2n-1}+\ldots$$.

Придавая n значения 1,2,3,… и учитывая, что $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $3!=1\cdot 2\cdot 3$,…, получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$.

Найти *n*-ый член ряда по его данным первым членам:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$$;

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{3}{5}-\ldots$$.

Решение.

Знаменатели членов ряда, начиная с первого, являются четными числами; следовательно, *n*-ый член ряда имеет вид $\frac{1}{2n}$.

Числители членов ряда образуют натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели – натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели – натуральный ряд чисел, начиная с 3. Знаки чередуются по закону $(-1)^{n+1}$ или по закону $(-1)^{n-1}$. Значит, *n*-й член ряда имеет вид $(-1)^{n+1}$. $\frac{n}{n+2}$ или $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}$.

Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}+\ldots$$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$$.

Решение.

Находим $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=0$.

Необходимый признак сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

который сходится, так как $q=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<1$.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2}<\frac{1}{2^2};\qquad \frac{1}{5\cdot 2^3}<\frac{1}{2^3};\ldots;\quad \frac{1}{(2n-1)2^n}<\frac{1}{2^n};\ldots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{1}{n}}=1,\quad 1\neq 0.$$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда; следовательно, ряд расходится.

Находим $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=0$.

Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{n^{3/2}}+\ldots,$$

который сходится, поскольку $p=\frac{3}{2},\quad \frac{3}{2}>1$, следовательно, сходится и данный ряд.

Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\ldots+\frac{2n}{5^n}+\ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}=\frac{3}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{3^n}{n^2}+\ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{3^n}+\ldots$$.

Решение.

Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число $n+1$, получим $\frac{2\cdot(n+1)}{5^{n+1}}$. Найдем предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му члену при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)\cdot 5^n}{5^n\cdot 5\cdot 2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1}{5},\quad \frac{1}{5}<1$$.

Следовательно, данный ряд сходится.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)^2}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=$$
$$=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=3\cdot 1^2=3,\quad 3>1.$$

Значит, данный ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}:\frac{n!}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)3^n}{3^n\cdot 3\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty,\quad \infty>1$$

, т.е. ряд расходится.

II. Знакопеременный ряд

2.1 Понятие знакопеременного ряда.

Числовой ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

называется ***знакопеременным***, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$$,

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно). Например,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots;$$

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}+\ldots;$$

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}-\frac{4}{16}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}+\ldots.$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости (установленный в 1714г. Лейбницем в письме к И.Бернулли).

2.2 Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда.

Теорема (Признак Лейбница).

Знакочередующийся ряд сходится, если:

Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$***;***

Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$***.***

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенствам

$0 < S < u_1$.

Замечания.

Исследование знакочередующегося ряда вида

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда $+u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$.

Ряды, для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются ***лейбницевскими*** (или рядами Лейбница).

Соотношение $0 < S < u_1$ позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму *S* данного ряда его частичной суммой S_n.

Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}$ $(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т.е. $S_n < u_{n+1}$. Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

Пример. Вычислить приблизительно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}$.

Решение: данный ряд Лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots = S.$$

Взяв пять членов, т.е. заменив S на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0{,}7834$$, сделаем ошибку, меньшую,

чем $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003$. Итак, $S \approx 0{,}7834$.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд расходится, то данный ряд называется ***условно*** (неабсолютно) ***сходящимся.***

2.3. Упражнения.

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots;$$

Решение.

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ и

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, составленный из абсолютных величин данного ряда, является гармоническим рядом, который, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \ldots;$$

Решение.

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$1 > \frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{4}{7} > \ldots$, но

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ряд расходится, так как признак Лейбница не выполняется.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots;$$

Решение.

Используя признак Лейбница, получим

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \ldots$; $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$,

т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$.

Это геометрический ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, где $q=\frac{1}{2}$, который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$;

Решение.

Используя признак Лейбница, имеем

$$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt{n}}>\ldots$$;

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, или

$$1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$.

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $p=\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}<1$. Следовательно, данный ряд сходится условно.

III. Функциональный ряд

3.1. Понятие функционального ряда.

Ряд, членами которого являются функции от x, называется ***функциональным***:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x_1)+u_2(x_2)+\ldots+u_n(x_n)+\ldots$$.

Придавая x определенное значение x_0, получим числовой ряд

$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$,

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда; если же ряд расходится – ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости***.

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$.

Определяется она в области сходимости равенством

$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ - частичная сумма ряда.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение. Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$.

Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т.е. при всех $x \in (-1;1)$; сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$;

$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, при $|x| < 1$.

3.2. Степенные ряды.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда***, а член $a_n x^n$ - общим членом ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Число называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда, если при $|x| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Радиус сходимости найдем, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$ (x не зависит от n),

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

т.е. если степенной ряд сходится при любых x, удовлетворяющих данному условию и расходится при $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Отсюда следует, что если существует предел

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \left(a_n \neq 0,\quad n = 1,2,3,\ldots\right),$$

то радиус сходимости ряда R равен этому пределу и степенной ряд сходится при $|x| < R$, т.е. в промежутке $-R < x < R$, который называется ***промежутком (интервалом) сходимости.***

Если $R = 0$, то степенной ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться.

Сходимость степенного ряда при $x = -R$ и $x = R$ исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

3.3. Упражнения.

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

Решение. Найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$|u_n| = \dfrac{|x^{2n-1}|}{2n-1}$, $|u_{n+1}| = \dfrac{|x^{2n+1}|}{2n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|} = |x^2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = x^2\cdot 1 = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ - это тоже сходящийся Лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1;1]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}{n\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x+2 < 2$, т.е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является промежуток $[-4;0)$.

IV. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т.е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Если $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

который называется ***рядом Маклорена***.

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и исходный ряд.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилам сложения и умножения многочленов. При этом промежуток сходимости полученного нового ряда совпадает с общей частью промежутков сходимости исходных рядов.

Для разложения функции $f(x)$ ***в ряд Маклорена необходимо***:

Вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=0$, т.е. $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$,…, $f^{(n)}(0)$;

Составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу ряда Маклорена;

Найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad (a_n\neq 0,\quad n=1,2,3,\ldots).$$

Таблица, содержащая разложения в ряд Маклорена некоторых элементных функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad x \in (-1;1).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad x \in (-1;1].$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;1].$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, x \in [-1;1]$$

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

Решение. Так как $f(x) = 3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x \ln 3}$, то, заменяя x на $x \ln 3$ в разложении e^x, получим:

$$f(x) = 3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!} x + \frac{\ln^2 3}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 3}{n!} x^n + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Пример 2. Выписать ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(4-x)$.

Решение. Так как $f(x) = \ln(4-x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)$, то воспользовавшись формулой (5), в которой заменим x на $\left(-\frac{x}{4}\right)$, получим:

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \ldots,$$

или

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

если

$-1 < -\frac{x}{4} \le 1$, т.е. $-4 \le x < 4$.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (4). Так как

$f(x)=\dfrac{2}{3-x}=\dfrac{2}{3\left(1-\dfrac{x}{3}\right)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$, то заменив x на $\dfrac{x}{3}$ получим:

$\dfrac{2}{3-x}=\dfrac{2}{3}\cdot\left(1+\dfrac{x}{3}+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{x}{3}\right)^3+\ldots\right)$, или

$\dfrac{2}{3-x}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^3}{3^3}+\ldots+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^n}{3^n}+\ldots$,

где $-1<\dfrac{x}{3}<1$, т.е. $-3<x<3$.

V. Практические задания для самоконтроля студентов.

При помощи признака сравнения рядов установить сходимость

или расходимость рядов:

$1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2^2}{3\cdot5}+\dfrac{2^3}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{2^4}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\ldots$.

$\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3\cdot2}+\dfrac{5}{4\cdot3}+\dfrac{6}{5\cdot4}+\ldots+\dfrac{n+2}{(n+1)n}+\ldots$.

$1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$.

$1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{17}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+1}+\ldots$.

$\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\ldots+\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$.

Исследовать по признаку Даламбера сходимость рядов:

$\dfrac{1}{2\cdot1}+\dfrac{1}{2^3\cdot3}+\dfrac{1}{2^5\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)}+\ldots$.

$$1+\frac{5}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\ldots+\frac{5^{n-1}}{n!}+\ldots$$.

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2^n}{n\cdot(n+1)}+\ldots$$.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$$.

$$1+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{3^2}+\frac{4^2}{3^3}+\ldots+\frac{n^2}{3^{n-1}}+\ldots$$.

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\ldots$$.;

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots$$.;

$$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots$$.;

$$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots$$.;

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3-\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$$.

Найти промежутки сходимости нижеследующих рядов и выяснить вопрос об их сходимости на концах промежутков сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n}$$;

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{(n+1)4^n}$$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Используя разложения в ряд Маклорена функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, разложить степенные ряды функции:

$y = e^{4x}$.

$y = e^{-x^2}$.

$y = \sin 3x$.

$y = \sin^2 x$.

$y = \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)$.

VI. Ответы

I.

1. сходится;
2. расходится;
3. сходится;
4. сходится;
5. расходится;
6. сходится;
7. сходится;
8. расходится;
9. сходится;
10. сходится.

II.

1. сходится абсолютно;
2. сходится абсолютно;
3. сходится условно;
4. сходится условно;
5. сходится абсолютно.

III.

1. $-3 \le x < 3$;
2. $-4 < x \le 4$;
3. $-1 < x \le 1$;
4. $-1 \le x \le 1$;
5. $-4 \le x \le -2$.

IV.

$$1+4x+\frac{4^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{4^nx^n}{n!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty);$$

$$1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty);$$

$$3x-\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{3^5x^5}{5!}-\ldots\quad(-\infty<x<\infty);$$

$$\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots\quad(-\infty<x<\infty);$$

$$\frac{x}{3}-\frac{x^2}{3^2\cdot 2}+\frac{x^3}{3^3\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{3^n\cdot n}+\ldots(-3<x\le 3).$$

VII. Историческая справка.

Решение многих задач сводится к вычислению значений функций и интегралов или к решению дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Однако точное выполнение указанных математических операций во многих случаях оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение многих задач с любой желаемой точностью при помощи рядов.

Ряды представляют собой простой и совершенный инструмент математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

Теория рядов создавалась в тесной связи с теорией приближенного представления функций в виде многочленов. Впервые это сделал И. Ньютон (1642 – 1727). в 1676г. В его письме к секретарю Лондонского Королевского Общества появилась формула:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{m!}x^m,$$

которую мы знаем как формулу бинома Ньютона.

Здесь мы видим функцию $(1+x)^m$, представленную в виде многочлена. Но если число m не является натуральным, в правой части равенства получается не полином, а бесконечная сумма слагаемых, то есть ряд.

Развивая идею Ньютона, английский математик Брук Тейлор (1685 – 1731) в 1715г. доказал, что любой функции, имеющей в точке x_0 производные всех порядков, можно сопоставить ряд:

$$f(x) \to f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$.

Мы не можем пока поставить знак равенства между функцией $f(x)$, принимающей конечное значение для любого значения x_0, и стоящим справа функциональным рядом.

Для того, чтобы вместо знака “$\to$” можно было поставить знак равенства, необходимо провести некоторые дополнительные рассуждения, связанные именно с бесконечностью числа слагаемых в правой части равенства и касающиеся области сходимости ряда.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид, в котором называется формулой Маклорена:

$$f(x) \to f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$.

Колин Маклорен (1698 – 1746), ученик Ньютона, в работе “Трактат о флюксиях” (1742) установил, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, - единственный, и это будет ряд Тейлора, порожденный такой функцией. В формуле бинома Ньютона коэффициенты при степенях x представляют собой значения $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, где $f(x) = (1+x)^m$.

Итак, ряды возникли в XVIII в. как способ представления функций, допускающих бесконечное дифференцирование. Однако функция, представляемая рядом, не называлась его суммой, и вообще в то время не было еще определено, что такое сумма числового или функционального ряда, были только попытки ввести это понятие.

Например, Л. Эйлер (1707-1783), выписав для функции соответствующий ей степенной ряд, придавал переменной x конкретное значение x_0. Получался числовой ряд. Суммой этого ряда Эйлер считал значение исходной функции в точке x_0. Но это не всегда верно.

О том, что расходящийся ряд не имеет суммы, ученые стали догадываться только в XIX в., хотя в XVIII в. многие, и прежде всего Л. Эйлер, много работали над понятиями сходимости и расходимости. Эйлер называл ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходящимся, если его общий член u_n стремится к нулю при возрастании n.

В теории расходящихся рядов Эйлер получил немало существенных результатов, однако результаты эти долго не находили применения. Еще в 1826г. Н.Г. Абель (1802 – 1829) называл расходящиеся ряды “дьявольским измышлением”. Результаты Эйлера нашли обоснование лишь в конце XIX в.

В формировании понятия суммы сходящегося ряда большую роль сыграл французский ученый О.Л. Коши (1789 – 1857); он сделал чрезвычайно много не только в теории рядов, но и теории пределов, в разработке самого понятия предела. В 1826г. Коши заявил, что расходящийся ряд не имеет суммы.

В 1768г. французский математик и философ Ж.Л. Д'Аламбер исследовал отношение последующего члена к предыдущему в биномиальном ряде и показал, что если это отношение по модулю меньше единицы, то ряд сходится. Коши в 1821г. доказал теорему, излагающую в общем виде признак сходимости знакоположительных рядов, называемых теперь признаком Д'Аламбера.

Для исследования сходимости знакочередующихся рядов используется признак Лейбница.

Г.В. Лейбниц (1646 – 1716), великий немецкий математик и философ, наряду с И. Ньютоном является основоположником дифференциального и интегрального исчисления.

Список литературы:

Основная:

1. Богомолов Н.В., Практические занятия по математике. М., "Высшая школа", 1990 – 495 с.;
2. Тарасов Н.П., Курс высшей математики для техникумов. М., "Наука", 1971 – 448 с.;
3. Зайцев И.Л., Курс высшей математики для техникумов. М., государственное издательство техникумов – теоретической литературы, 1957 - 339 с.;
4. Письменный Д.Т., Курс лекций по высшей математике. М., "Айрис Пресс", 2005, часть 2 – 256 с.;
5. Выгодский М.Я., Справочник по высшей математике. М., "Наука", 1975 – 872 с.;

Дополнительная:

1. Гусак А.А., Высшая математика. В 2-х т., Т.2: Учебное пособие для студентов вузов. Мос., "ТетраСистемс", 1988 – 448 с.;
2. Григулецкий В.Г., Лукьянова И.В., Петунина И.А., Математика для студентов экономических специальностей. Часть 2. Краснодар, 2002 – 348 с.;
3. Григулецкий В.Г. и др. Задачник-практикум по математике. Краснодар. КГАУ, 2003 – 170 с.;
4. Григулецкий В.Г., Степанцова К.Г., Гетман В.Н., Задачи и упражнения для студентов учетно-финансового факультета. Краснодар. 2001 – 173 с.;
5. Григулецкий В.Г., Ященко З.В., Высшая математика. Краснодар, 1998 – 186 с.;
6. Малыхин В.И., Математика в экономике. М., "Инфра-М", 1999 – 356с.