Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

§1. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве

Положение точки в пространстве обычно определяется заданием тройки чисел – координат точки в декартовом базисе.

1) *Расстояние между двумя точками* пространства $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ и $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$ можно определить по формуле

$$\boxed{d=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

(как длину соответствующего вектора).

Таким образом, расстояние между двумя точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответственных координат этих точек.

2) Теперь рассмотрим задачу о делении отрезка в данном отношении.

Пусть даны две точки $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ и $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$. Требуется найти координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$, лежащей на отрезке AB и делящей отрезок в данном отношении

$$AM:MB=m:n.$$

Рассмотрим два вектора

$$\overline{AM}=\left\{x_M-x_A, y_M-y_A, z_M-z_A\right\} \quad \text{и}$$

$$\overline{MB}=\left\{x_B-x_M, y_B-y_M, z_B-z_M\right\}.$$

Эти векторы коллинеарны и одинаково направлены. Поэтому $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, где $\lambda = \left|\overline{AM}\right| : \left|\overline{MB}\right| = m : n$ (рис. 1).

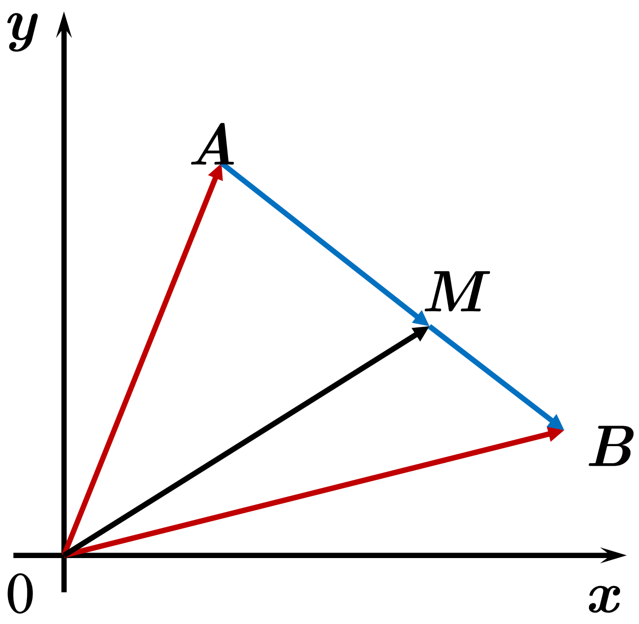

Рис. 1.

Известно, что если векторы равны, то равны и их координаты в одном и том же базисе. Следовательно, векторное равенство равносильно трём скалярным равенствам

$$x_M - x_A = \lambda(x_B - x_M),$$
$$y_M - y_A = \lambda(y_B - y_M),$$
$$z_M - z_A = \lambda(z_B - z_M).$$

Отсюда находим координаты искомой точки

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}}.$$

Если нас интересуют координаты середины отрезка (пусть это будет точка $C(x_c, y_c, z_c)$), то в этих формулах следует положить $\lambda = 1$. Тогда получим

$$\boxed{x_c = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_c = \frac{y_A + y_B}{2}, \qquad z_c = \frac{z_A + z_B}{2}}.$$

Таким образом, координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат концов отрезка.

3) По координатам вершин треугольника $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ найти его площадь (рис.2).

Пусть $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$ - радиус-векторы точек M_1, M_2, M_3, соответственно. Известно, что

$\overline{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{r}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$.

Рассмотрим векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$.

Из определения векторного произведения известно, что $\left|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}\right| = S$ (параллелограмма).

Следовательно, искомая площадь треугольника:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}\right|.$$

По правилу треугольника

$$\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overline{M_1M_3} = \overline{r}_3 - \overline{r}_1 = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

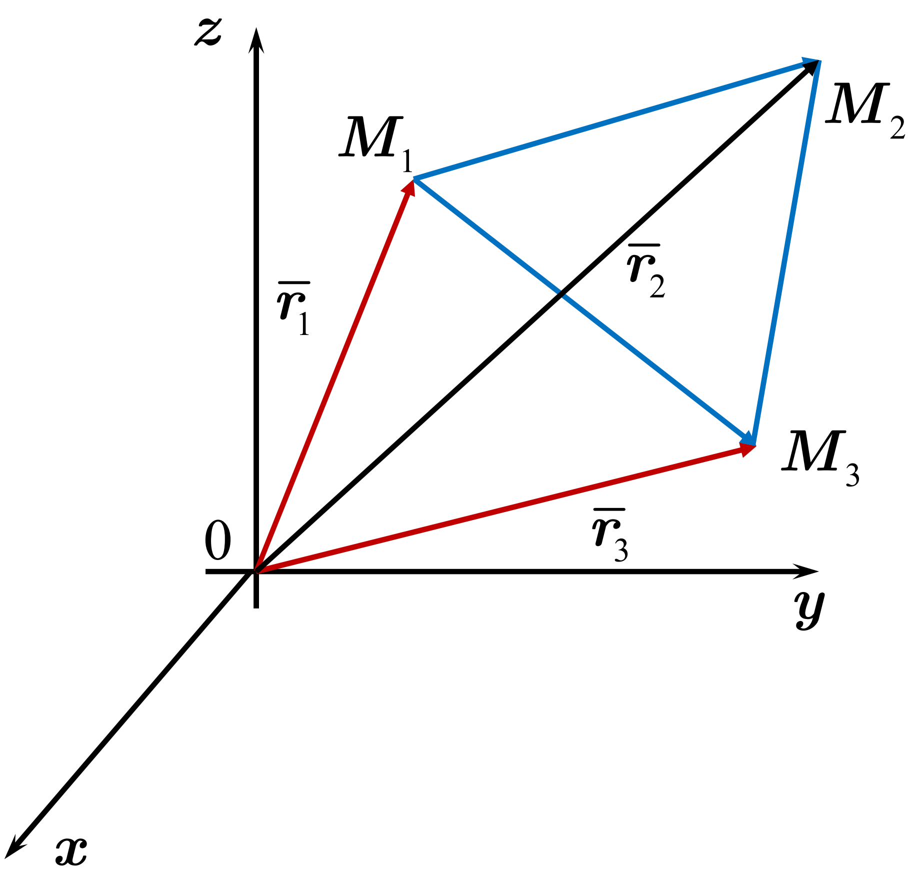

Рис. 2.

$$\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\boxed{S_\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{ \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 }}$$

В плоском случае

$$S_\Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

§2. Понятие об уравнении поверхности

Определение 1.

Уравнением поверхности называется равенство, которому удовлетворяют координаты произвольной точки на поверхности и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не лежащей на ней.

Пример. Найти уравнение сферической поверхности с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R.

Решение. Любая точка сферической поверхности удалена от ее центра на расстояние, равное R.

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка этой поверхности, тогда $\left|\overline{MM_0}\right| = R$, следовательно

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R \text{ или}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на сфере, и не удовлетворяют координаты никакой другой точки, не лежащей на ней.

Таким, образом, это уравнение есть уравнение сферы.

§3. Нормальное уравнение плоскости

Пусть дана плоскость α (рис. 3). Опустим на плоскость перпендикуляр OA. Его длину обозначим p. Введем единичный вектор $\bar{n}$, перпендикулярный плоскости α:

$$\bar{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$$

На плоскости возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$.

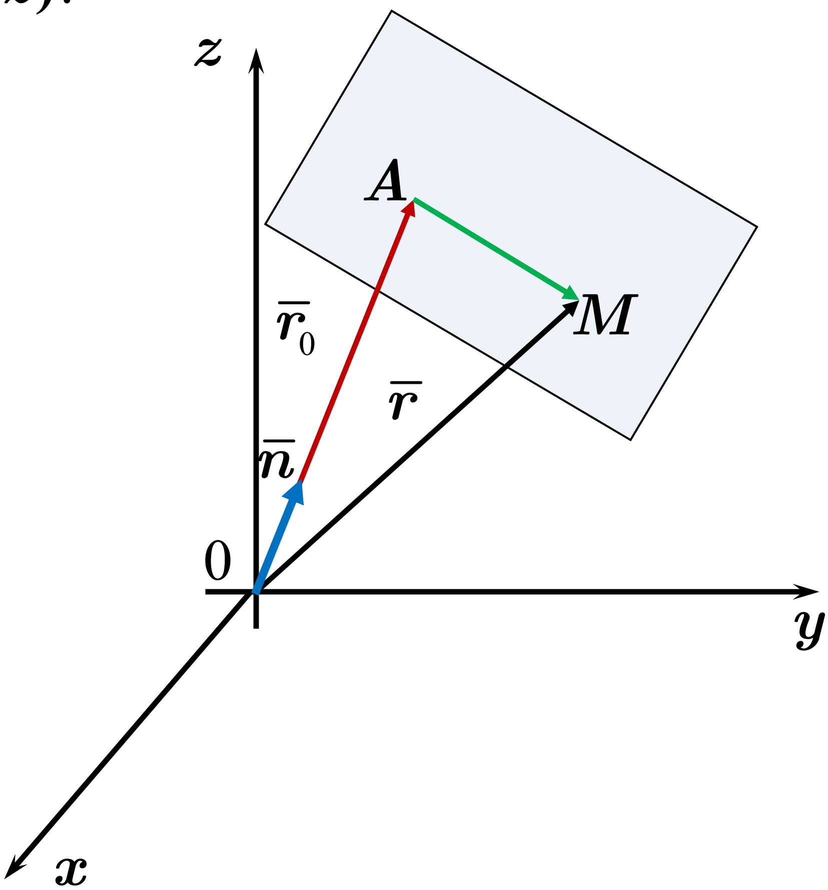

Рис. 3.

Пусть теперь $\overline{r}_0 = \overline{OA}$, $\overline{r} = \overline{OM}$ - радиус-векторы точек A и M, соответственно. Тогда $\overline{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\overline{r} = \{x, y, z\}$.

Так как точки A и M принадлежат плоскости, то вектор $\overline{AM}$ лежит в плоскости α, следовательно $\overline{AM} \perp \overline{n}$. Условие ортогональности – это $\overline{AM} \cdot \overline{n} = 0$. Но $\overline{AM} = \overline{r} - \overline{r}_0$, $\Rightarrow \overline{n} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$ или $\overline{n} \cdot \overline{r} - \overline{n} \cdot \overline{r}_0 = 0$.

$$\overline{n} \cdot \overline{r}_0 = |\overline{n}||\overline{r}_0| \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{r}_0}) = |\overline{r}_0| = \left|\overline{OA}\right| = p.$$

Следовательно,

$$\boxed{\overline{n} \cdot \overline{r} - p = 0}.$$

Это нормальное уравнение плоскости в векторной форме.

Если записать скалярное произведение $\bar{n}\cdot\bar{r}$ через координаты векторов, то получим нормальное уравнение плоскости в координатной форме:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}. \qquad \textbf{(1)}$$

Замечание 1. В нормальном уравнении плоскости сумма квадратов коэффициентов, стоящих при x, y и z равна 1, а свободный член – отрицательный.

Замечание 2. Если точка M *не принадлежит плоскости* и при этом а) расположена по другую сторону от нее, нежели чем начало координат (в положительном полупространстве плоскости), то очевидно, $\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_0)>0$ (угол между $\bar{n}$ и $\overline{AM}$ острый), т.е. $\bar{n}\cdot\bar{r}-p>0$; б) расположена по ту же сторону от нее, что и начало координат (в отрицательном полупространстве плоскости), то $\bar{n}\cdot\bar{r}-p<0$.

Замечание 3. Из замечания 2 следует утверждение. Расположение точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве относительно плоскости α с нормальным уравнением (1) определяется числом

$$u = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Возможно три случая:

1) $u=0 \Rightarrow M_0\in\alpha$;

2) $u>0 \Rightarrow$ точка M_0 находится в положительном полупространстве плоскости;

3) $u < 0 \Rightarrow$ точка M_0 находится в отрицательном полупространстве плоскости.

§4. Общее уравнение плоскости

Определение.

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости называется *нормальным вектором* этой плоскости или *нормалью*.

Всякое уравнение вида

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

определяет плоскость при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Доказательство этого утверждения заключается в следующем. Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{-\mathbf{sign}(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где

$$\mathbf{sign}(D) = \begin{cases} 1, & D \geq 0 \\ -1, & D < 0 \end{cases}.$$

Тогда сумма квадратов коэффициентов при переменных в уравнении будет равна 1, а свободный член будет отрицательным. Следовательно, полученное уравнение, <u>эквивалентное</u> исходному, будет нормальным уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n}$, координаты которого определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Таким образом, плоскость задаётся уравнением первой степени относительно декартовых координат, а коэффициенты A, B и C являются координатами вектора $\overline{N}$, нормального плоскости, который определяет ориентацию плоскости в пространстве.

§5. Исследование общего уравнения плоскости

Рассмотрим различные частные случаи общего уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и выясним особенности расположения плоскости относительно осей координат, если некоторые коэффициенты обращаются в нуль.

1) Пусть $D=0$. Тогда уравнение плоскости примет вид $Ax+By+Cz=0$.

Этому уравнению удовлетворяют координаты начала системы координат, т.е. $x=0$, $y=0$, $z=0$. Таким образом, если в уравнении плоскости отсутствует свободный член D, то плоскость проходит через начало координат.

2) Пусть один из коэффициентов при переменных равен нулю. Например, пусть $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$. В этом случае уравнение плоскости принимает вид

$By + Cz + D = 0$ и её нормальный вектор $\overline{N} = \{0; B; C\}$ имеет нулевую проекцию на ось Ox. Следовательно, он ей перпендикулярен и эта плоскость параллельна оси Ox. Очевидно, аналогичная ситуация будет, если один какой-то другой коэффициент обратится в нуль. Таким образом, если в уравнении плоскости отсутствует какая-либо переменная, то эта плоскость параллельна соответствующей оси координат.

3) Пусть сразу два коэффициента равны нулю: $A = B = 0$, а $C \neq 0$. Тогда уравнение плоскости имеет вид $Cz + D = 0$.

Её нормальный вектор $\overline{N} = \{0; 0; C\}$ будет параллелен оси Oz и перпендикулярен одновременно оси Ox и оси Oy, следовательно, и плоскость будет параллельна этим осям координат (а следовательно и плоскости Oxy, т.е. $z = 0$). На ней аппликата у всех точек будет одинакова $z = -\dfrac{D}{C}$.

Например, уравнение плоскости имеет вид $3x + 4z = 0$.

Здесь отсутствует свободный член. Значит, эта плоскость проходит через начало координат. Кроме того, она должна быть параллельна оси Oy.

Следовательно, она проходит через ось Oy.

§6. Расстояние от точки до плоскости.

Найдём расстояние от некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (считаем, что точка M_0 не принадлежит этой плоскости). Возьмём на плоскости любую точку $M(x, y, z)$ (рис. 4).

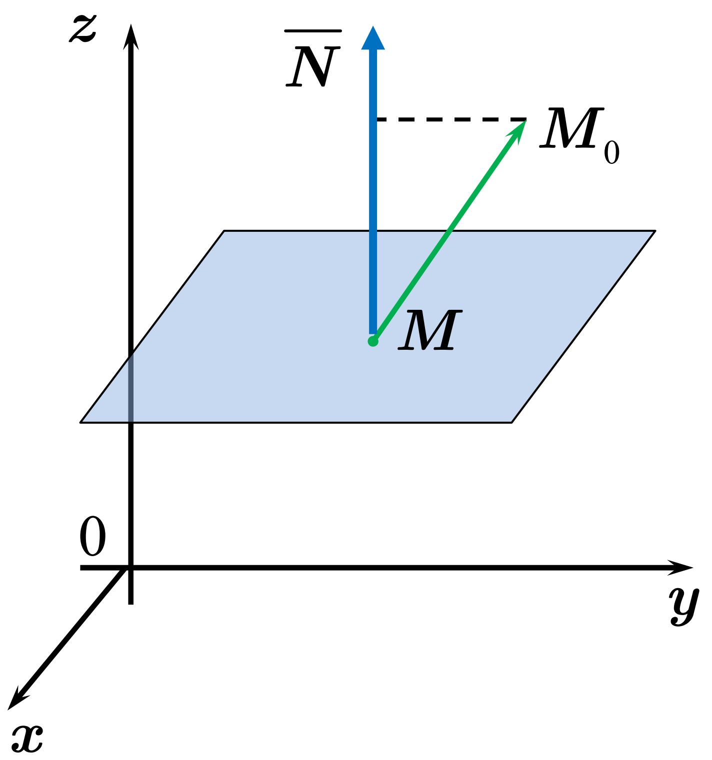

Рис. 4.

Тогда расстояние от точки M_0 до нашей плоскости будет равно модулю проекции вектора $\overline{M_0M}$ на нормаль $\overline{N}$ к плоскости, то есть

$$d = \left| \mathbf{пр}_{\overline{N}} \overline{M_0M} \right| = \left| \frac{\overline{N} \cdot \overline{M_0M}}{\left| \overline{N} \right|} \right| =$$

$$=\left|\frac{A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)}{\left|\overline{N}\right|}\right|=$$

$$=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax+By+Cz)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Таким образом, расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определится формулой

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$

В частности, для расстояния от плоскости до начала координат получим формулу

$$\boxed{d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Если плоскость задана своим нормальным уравнением, то формула для расстояния от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости будет иметь вид:

$$\boxed{d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|}$$

§7. Другие формы записи уравнения плоскости

Определение.

Любая фиксированная точка плоскости называется точкой *привязки*.

Положение плоскости в пространстве полностью определяется заданием вектора нормали $\overline{N}\left(A,B,C\right)$ и точкой привязки $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Напишем уравнение такой плоскости. Пусть $M(x,y,z)$ - произвольная точка плоскости.

Тогда вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий эти две точки, будет лежать в плоскости, и, следовательно, будет перпендикулярен $\overline{N}$ (Рис. 4).

Координаты вектора $\overline{M_0M}$ найдём как разность координат точек M и M_0 $\Rightarrow$ $\overline{M_0M}=\left\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\right\}$.

В силу ортогональности векторов $\overline{M_0M}$ и $\bar{N}$ их скалярное произведение $\overline{M_0M}\cdot\overline{N}$ должно равняться нулю. Следовательно, уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\left\{A;B;C\right\}$, в векторной форме имеет вид $\bar{N}\cdot\overline{M_0M}=0$.

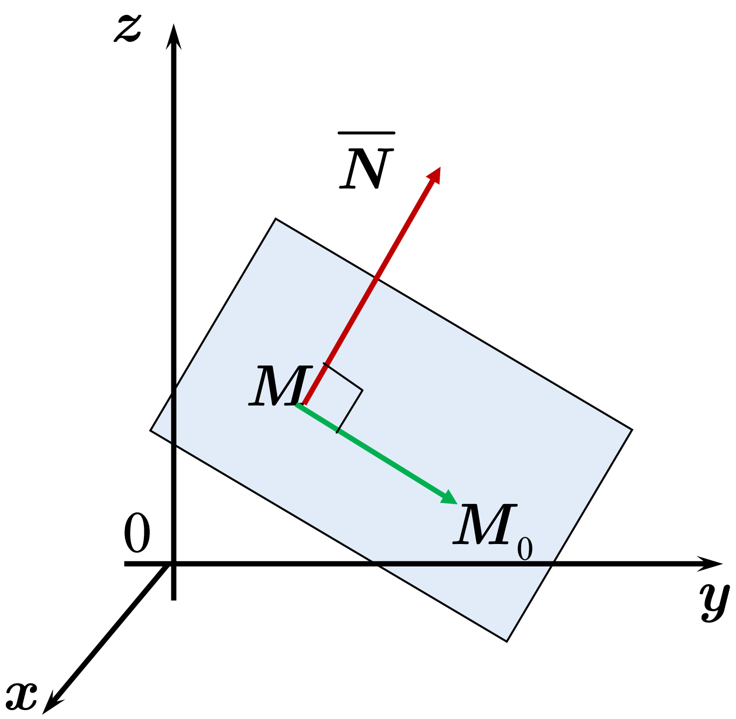

Рис. 4

Запишем его в координатном виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Найдём уравнение плоскости, <u>проходящей через три</u> заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Для этого рассмотрим два вектора $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Они оба лежат в искомой плоскости, их векторное произведение можно принять за нормальный вектор этой плоскости

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\bar{i}\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}+$$

$$+\bar{k}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Если за точку привязки взять точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, то вектор $\overline{MM_1}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$ (где $M(x,y,z)$- произвольная точка плоскости) будет ортогонален вектору $\overline{N}$. Учитывая, что при этом их скалярное произведение равно нулю получаем уравнение искомой плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

В такой же форме можно получить уравнение плоскости, если рассмотреть смешанное произведение векторов $\overline{MM_1},\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Если точка M принадлежит плоскости, то векторы должны быть компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю.

Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть в уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ все коэффициенты отличны от нуля. Это означает, что она пересекает все три координатные оси (так как ни одной их них не параллельна) и не проходит через начало координат.

Найдём отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат Ox, Oy и Oz, обозначая их при этом через a, b и c соответственно.

Положим поочерёдно:

1) $y = z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = -\dfrac{D}{A}$;

2) $x = z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = -\dfrac{D}{B}$;

3) $x = y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\dfrac{D}{C}$.

Перенесём теперь в уравнении свободный член D в правую часть равенства и разделим обе части полученного уравнения

на $(-D)$; при этом поместим все коэффициенты при переменных в знаменатель. Тогда получим

$$\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b и c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Ox, Oy и Oz соответственно.

Легко видеть, что плоскость проходит через точки с координатами $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ и $(0; 0; c)$.

Очевидно, что если плоскость проходит через начало координат, то её невозможно задать уравнением в отрезках.

§8. Угол между двумя плоскостями.

Пусть заданы две плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Двугранный угол φ, образованный двумя данными плоскостями (а он измеряется линейным углом), называется углом между этими плоскостями. Этот угол равен углу между нормальными векторами соответствующих плоскостей. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\overline{N}_1 = \left\{A_1; B_1; C_1\right\}$ и $\overline{N}_2 = \left\{A_2; B_2; C_2\right\}$- нормальные векторы заданных плоскостей.

Условие параллельности двух плоскостей сводится к условию коллинеарности их нормальных векторов $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности двух плоскостей получим из условия ортогональности их нормальных векторов (скалярное произведение равно нулю)

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Если заданные плоскости не параллельны, то множество плоскостей, проходящих через прямую, по которой они пересекаются, называется *пучком плоскостей*.

Можно доказать, что уравнение любой плоскости из этого множества (кроме второй из заданных) может быть записано в виде

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 +$$
$$+\lambda\left(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2\right) = 0,$$

и получено из этой формулы путём подбора параметра λ с учётом условий конкретной задачи.

§9. Уравнение прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве полностью определится, если задана её ориентация в пространстве и какая-нибудь точка, принадлежащая прямой. Чтобы задать ориентацию прямой достаточно указать координаты какого-нибудь вектора, параллельного этой прямой. Ну, а точка, естественно однозначно определяется своими координатами в пространстве.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной вектору $\overline{S} = \{m; n; p\}$.

Его будем называть *направляющим вектором прямой.*

Возьмём на искомой прямой произвольную точку $M(x, y, z)$.

Соединим точки M_0 и M. Очевидно, что векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{S}$ коллинеарны. По условию коллинеарности имеем

$$\overline{M_0M} = t \cdot \overline{S},$$

где $t-$ некоторый скалярный параметр, принимающий для каждой точки M определённое числовое значение.

При перемещении точки M вдоль прямой эти числовые значения параметра t изменяются от $-\infty$ до $+\infty$.

Полученное векторное уравнение прямой равносильно трём скалярным уравнениям

$$\begin{matrix} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = mt + x_0; \\ y = nt + y_0; \\ z = pt + z_0. \end{cases}$$

Три последних соотношения называются <u>параметрическими</u> уравнениями прямой (или уравнениями в параметрической форме).

Отсюда находим

$$\frac{x - x_0}{m} = t; \qquad \frac{y - y_0}{n} = t; \qquad \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Приравняем теперь левые части этих равенств между собой и получим *канонические уравнения* прямой, параллельной направляющему вектору $\overline{S} = \{ m; n; p \}$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которые имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Замечание 1. Так как вектор $\overline{S}$ параллелен данной прямой, то

<u>направляющими косинусами прямой</u> будем называть направляющие косинусы вектора $\overline{S}$:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{p}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Замечание 2. Прямую можно также задать как линию пересечения двух плоскостей, т.е. задать системой уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы записать уравнение такой прямой в канонической форме, необходимо знать точку M_0 на прямой и её направляющий вектор $\overline{S}$.

Координаты точки M_0 можно найти из данной системы, выбирая одну из координат произвольно и решая после этого систему уравнений с двумя неизвестными координатами.

В качестве направляющего вектора прямой $\overline{S}$ можно принять

(в силу определения векторного произведения двух векторов)

$\overline{S} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$,

где $\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$- нормальные векторы заданных плоскостей, так как направляющий вектор $\overline{S}$ должен быть перпендикулярен обоим нормальным векторам, ибо он лежит в этих двух плоскостях одновременно.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ может быть записано в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z - z_1}.$$

Действительно, за направляющий вектор можно принять вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Рассмотрим пример. Пусть надо написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -1; -3)$ и $B(2; 1; 5)$.

По формуле имеем $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+3}{-8}$.

Здесь ноль в знаменателе первого отношения означает, что направляющий вектор искомой прямой ортогонален оси $\boldsymbol{Ox}$.

Такую прямую можно задать также как пересечение двух плоскостей, одна из которых параллельна координатной плоскости $\boldsymbol{yOz}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = 2 \\ \dfrac{\boldsymbol{y}+1}{-2} = \dfrac{\boldsymbol{z}+3}{-8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x} = 2 \\ 4(\boldsymbol{y}+2)-(\boldsymbol{z}+3)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x} = 2 \\ 4\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}+5=0 \end{cases}$$

Угол между двумя прямыми в пространстве.

Пусть теперь заданы две прямые в канонической форме

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{m}_1} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{n}_1} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{p}_1} \quad \text{и}$$

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2}{\boldsymbol{m}_2} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_2}{\boldsymbol{n}_2} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_2}{\boldsymbol{p}_2}.$$

Углом φ между двумя прямыми <u>называется</u> *угол между их направляющими векторами* $\overline{\boldsymbol{S}}_1 = \left\{ \boldsymbol{m}_1; \boldsymbol{n}_1; \boldsymbol{p}_1 \right\}$ и $\overline{\boldsymbol{S}}_2 = \left\{ \boldsymbol{m}_2; \boldsymbol{n}_2; \boldsymbol{p}_2 \right\}$:

$$\mathbf{cos}\,\varphi = \mathbf{cos}\left(\overline{\boldsymbol{S}}_1, \overline{\boldsymbol{S}}_2\right) = \frac{\overline{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_2}{\left|\overline{\boldsymbol{S}}_1\right| \cdot \left|\overline{\boldsymbol{S}}_2\right|} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_2}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

так как если прямые параллельны, то их направляющие векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ коллинеарны, и, следовательно, их координаты должны быть пропорциональны.

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны и их направляющие векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю $\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2 = 0$. Поэтому условие перпендикулярности имеет вид

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{S} = \{ m; n; p \}$ можно найти по формуле

$$d = h = \frac{S_{\text{параллелограмма}}}{\left| \overline{S} \right|} = \frac{\left| \overline{M_0 M_1} \times \overline{S} \right|}{\left| \overline{S} \right|}$$

Кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми можно определить как расстояние от точки привязки первой прямой до вспомогательной плоскости, содержащей вторую прямую и параллельную первой прямой (за её нормальный вектор можно взять векторное произведение двух направляющих векторов заданных прямых). Его можно найти как проекцию вектора, соединяющего две точки привязки прямых на нормальный вектор той самой вспомогательной плоскости

$$\boldsymbol{d} = \frac{\left|\left(\overline{\boldsymbol{S}}_1 \times \overline{\boldsymbol{S}}_2\right) \cdot \overline{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}\right|}{\left|\overline{\boldsymbol{S}}_1 \times \overline{\boldsymbol{S}}_2\right|}.$$

§9. Прямая и плоскость.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве.

Пусть дана плоскость $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D} = 0$

с нормальным вектором $\overline{\boldsymbol{N}} = \left\{\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C}\right\}$ и прямая

$$\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0}{\boldsymbol{p}}$$

с направляющим вектором $\overline{\boldsymbol{S}} = \left\{\boldsymbol{m}; \boldsymbol{n}; \boldsymbol{p}\right\}$.

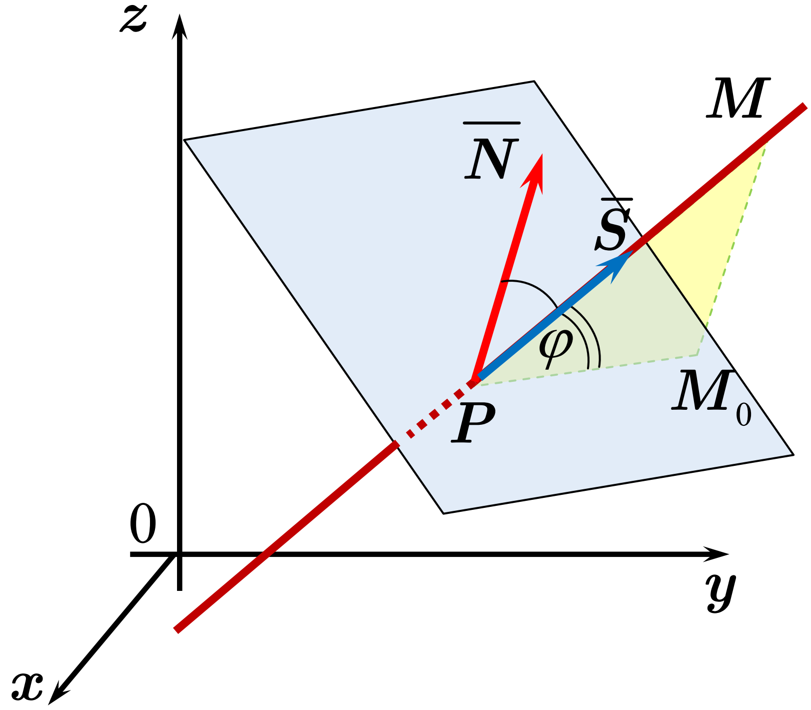

Рис. 5.

$$\cos\left(\overline{N},\overline{S}\right)=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Заметим, что

$$\cos\left(\overline{N},\overline{S}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi.$$

Тогда

$$\sin\varphi=\frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Отсюда следует условие параллельности прямой и плоскости (при $\sin\varphi=0$, т.е. векторы ортогональны)

$$Am+Bn+Cp=0$$

и условие их перпендикулярности (векторы $\overline{S}$ и $\overline{N}$ коллинеарны)

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Точка пересечения прямой и плоскости.

Координаты такой точки должны одновременно удовлетворять уравнению плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и уравнению прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

Данная прямая проходит через точку с координатами (x_0, y_0, z_0) и её направляющий вектор $\overline{S}=\{m;n;p\}$. Нормальный вектор плоскости $\overline{N}=\{A;B;C\}$. Так как каждой точке прямой отвечает определённое значение параметра t, то надо найти такое значение параметра, при котором будет удовлетворяться и уравнение плоскости. Поэтому запишем уравнение данной прямой в параметрическом виде

$$x=x_0+mt; \quad y=y_0+nt; \quad z=z_0+pt$$

и подставим эти соотношения в уравнение плоскости.

Тогда получим

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$$

или $(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0.$

Отсюда находим интересующее нас значение параметра

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Исследуем полученную формулу.

1. Пусть $\boldsymbol{Am}+\boldsymbol{Bn}+\boldsymbol{Cp}\neq 0$. Тогда прямая не параллельна плоскости. По найденной формуле определим единственное значение параметра $\boldsymbol{t}$, а затем (из параметрических уравнений) и соответствующие координаты $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ точки пересечения.

2. Пусть $\boldsymbol{Am}+\boldsymbol{Bn}+\boldsymbol{Cp}=0$, а $\boldsymbol{Ax}_0+\boldsymbol{By}_0+\boldsymbol{Cz}_0+\boldsymbol{D}\neq 0$. В этом случае прямая и плоскость параллельны, так как вектора $\overline{\boldsymbol{S}}$ и $\overline{\boldsymbol{N}}$ ортогональны. Прямая не имеет ни одной общей точки с плоскостью.

3. Пусть теперь

$\boldsymbol{Am}+\boldsymbol{Bn}+\boldsymbol{Cp}=0$, и $\boldsymbol{Ax}_0+\boldsymbol{By}_0+\boldsymbol{Cz}_0+\boldsymbol{D}=0$.

В этом случае прямая и плоскость параллельны и точка с координатами $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{z}_0)$, через которую проходит прямая, принадлежит плоскости. Следовательно, прямая лежит в плоскости, и существует бесчисленное множество точек встречи прямой с плоскостью (точка встречи не определена).

Таким образом, условия

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax}_0+\boldsymbol{By}_0+\boldsymbol{Cz}_0+\boldsymbol{D}=0; \\ \boldsymbol{Am}+\boldsymbol{Bn}+\boldsymbol{Cp}=0. \end{cases}$$

есть условия того, что прямая целиком лежит в плоскости.

Замечание.

Проекция прямой на плоскость определится как прямая пересечения данной плоскости и проектирующей плоскости (её нормальный вектор есть векторное произведение направляющего и нормального векторов).

§10. Аналитическая геометрия на плоскости.

В этом частном случае следует считать все проекции на ось Oz равными нулю.

Таким образом, расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ или (обычно при решении задач аналитической геометрии на плоскости третью координату опускают) $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определится формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Если заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, а точка $M_0(x_0, y_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda:1$, т.е.

$$\frac{M_1M_0}{M_0M_2} = \lambda,$$

то $x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $\qquad y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

В частности координаты середины отрезка M_1M_2, т.е. при $\lambda = 1$, будут равны

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_{\text{ср}} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Уравнение прямой на плоскости.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельной вектору $\overline{S} = \{m; n\}$.

Возьмём на искомой прямой произвольную точку $M(x, y)$.

Соединим точки M_0 и M. Очевидно, что векторы $\overline{M_0 M}$ и $\overline{S}$ коллинеарны. По условию коллинеарности имеем

$$\overline{M_0 M} = t \cdot \overline{S}.$$

Полученное векторное уравнение прямой равносильно двум скалярным уравнениям

$$\begin{matrix} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = mt + x_0; \\ y = nt + y_0. \end{cases}$$

Два последних соотношения называются <u>параметрическими</u> уравнениями прямой на плоскости.

Отсюда находим

$$\frac{x - x_0}{m} = t; \qquad \frac{y - y_0}{n} = t.$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Общее уравнение прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \mathbf{tg}\,\varphi$ **:** $y = kx + b$.

Здесь φ – угол наклона прямой к оси Ox; b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Если прямая перпендикулярна оси Ox, то её уравнение имеет вид $x = const$, а если перпендикулярна оси Oy, то естественно – $y = const$.

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b – величина отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно. Очевидно, что если прямая проходит через начало координат, то её невозможно задать уравнением в отрезках.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ под заданным углом φ к оси Ox ($\mathbf{tg}\,\varphi = k$):

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Пусть две прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$; α – один из смежных углов между прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Тогда имеем

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Отсюда получаем:

условие параллельности прямых ℓ_1 и ℓ_2:

$$k_2 = k_1$$

и условие их перпендикулярности

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Для расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ имеем формулу

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

До сих пор у нас встречалась только линейная зависимость от независимых переменных.

Рассмотрим теперь кривые второго порядка.

Окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки, т.е. центра.

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и с радиусом R (исходя из формулы для расстояния между двумя точками) записывают в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

Эллипс.

Определение.

Эллипсом называется геометрическое место точек (ГМТ), для которых сумма расстояний до двух заданных точек плоскости (их называют фокусами эллипса) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выведем уравнение эллипса.

Пусть $\boldsymbol{M(x,y)}$ – произвольная точка эллипса; $2\boldsymbol{c}$ – расстояние между фокусами эллипса $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$; $2\boldsymbol{a}$ – сумма расстояний от точки $\boldsymbol{M}$ до фокусов эллипса $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{MF}_1+\boldsymbol{MF}_2=2\boldsymbol{a}$;

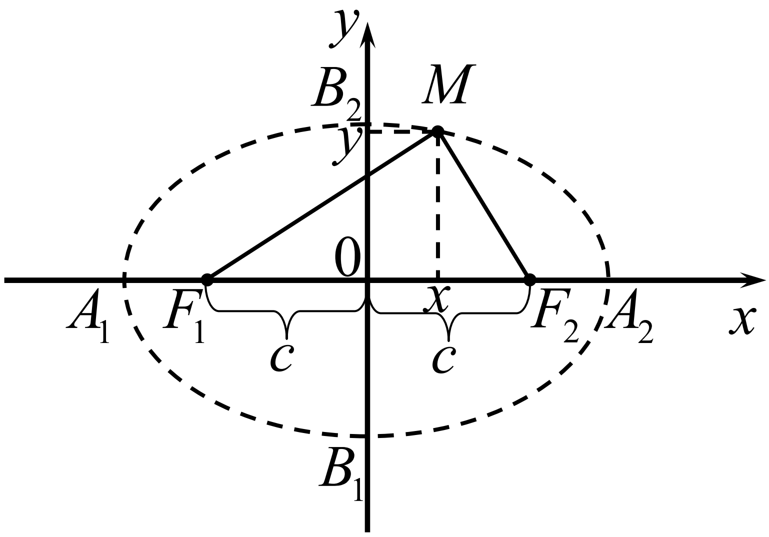

Рис. 6

Очевидно, что $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{c}$ (так как $2\boldsymbol{a}$ – сумма двух сторон треугольника, а $2\boldsymbol{c}$ – одна его сторона).

Для вывода простейшего уравнения эллипса выберем следующее расположение координатных осей. Поместим фокусы эллипса $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ на оси абсцисс симметрично относительно оси ординат. Начало координат будет делить пополам отрезок $\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2$.

Координаты фокусов будут $\boldsymbol{F}_1(-\boldsymbol{c};0)$ $\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{c};0)$. (Рис. 6)

Следовательно, $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $MF_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$.

Тогда по определению эллипса имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Оставим в левой части один корень

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведём в квадрат обе части этого уравнения

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Теперь ещё раз возведём в квадрат обе части и откроем скобки

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Приведём подобные члены, все переменные величины перенесём в левую часть, остальное – в правую часть.

Тогда получим:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделим обе части этого уравнения на $a^2(a^2 - c^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как $a > c$, то можно положить $a^2 - c^2 = b^2$

Тогда получим простейшую (её называют *канонической*) форму уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Исследуем форму эллипса по его уравнению. Найдём точки пересечения этой кривой с осями координат: при $y = 0$ имеем $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$; при $x = 0 \Rightarrow B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$.

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \le 1. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{array}$$

Таким образом, эллипс целиком лежит внутри прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Далее заметим, что уравнение сохраняет вид, если заменить x на $-x$ или y на $-y$ (так как обе переменные входят в чётных степенях). Отсюда следует, что если эллипсу принадлежит некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$, то одновременно с нею эллипсу принадлежат ещё три точки $M_1(x_0, -y_0)$, $M_2(-x_0, y_0)$ и $M_3(-x_0, -y_0)$, симметричные с точкой M_0 относительно оси Ox, оси Oy и начала координат соответственно

Это означает, что наше уравнение описывает замкнутую кривую, у которой оси координат являются осями симметрии.

Поэтому для её построения достаточно построить дугу, расположенную в первой четверти.

Разрешим уравнение эллипса относительно y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Для построения дуги эллипса, расположенной в первой четверти, перед корнем следует взять знак «+» и изменять переменную x только от 0 до a

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \le x \le a.$$

При $x = 0$ получаем точку $B_2(0; b)$, с увеличением абсциссы от 0 до a ордината убывает от b до 0. Теперь мы можем построить дугу эллипса в первой четверти и по соображениям симметрии весь эллипс.

Отрезок оси абсцисс $A_1A_2 = 2a$ называют *большой* осью эллипса, а отрезок оси ординат $B_1B_2 = 2b$ малой его осью. Половину их длин – числа a и b – обычно называют большой и малой *полуосями* эллипса. Начало координат такой канонической системы координат называют *центром* эллипса. Концы большой и малой осей эллипса – точки A_1, A_2, B_1 и B_2 – называют его *вершинами*.

Форма эллипса зависит от величины отношения $\frac{b}{a}$ длин его малой и большой полуосей: чем больше это отношение, тем эллипс будет менее «сплющенным», менее сжатым; при $b = a$ (когда полуоси равны между собой) он превращается в окружность радиуса a с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ называется *эксцентриситетом* эллипса и характеризует “сплюснутость” эллипса относительно осей координат $(0 < \varepsilon < 1)$.

В частном случае окружности $(b = a,\ c = 0,\ \varepsilon = 0)$ оба фокуса совпадают с началом канонической системы координат.

Гипербола.

Определение.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек плоскости (их называют фокусами гиперболы) есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы;

$2c$ – расстояние между фокусами гиперболы F_1 и F_2; $2a$ – разность расстояний от точки M до фокусов гиперболы F_1 и F_2, т.е. $MF_1 - MF_2 = 2a < 2c$ (a – действительная полуось гиперболы);

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ – мнимая полуось гиперболы.

Если точки F_1 и F_2 лежат на оси абсцисс, а начало координат делит отрезок F_1F_2 пополам, то координаты фокусов будут $F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$.

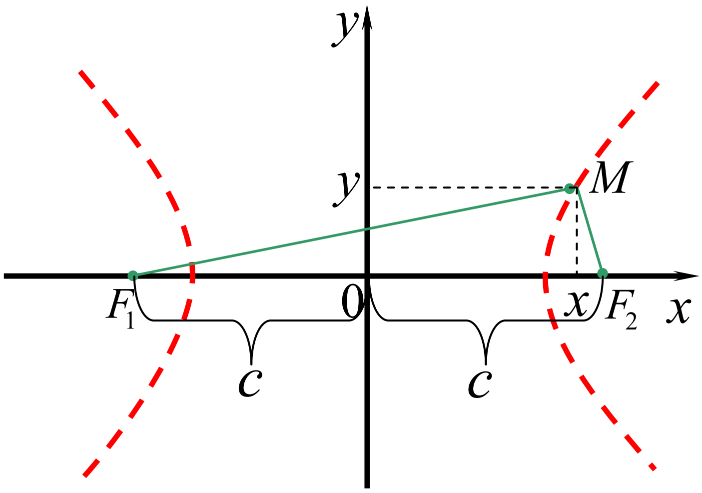

Рис. 7

По определению гиперболы $(MF_1 - MF_2 = 2a)$ имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

После аналогичных предыдущему пункту преобразований это уравнение приобретает следующий простейший вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

который называют каноническим.

Гипербола пересекает ось Ox в двух точках $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$. С осью Oy у неё пересечений нет (поэтому она и называется мнимой осью).

Для построения гиперболы по её уравнению заметим прежде всего, что

$$\frac{x^2}{a^2} \ge 1, \qquad |x| \ge a.$$

Отсюда следует, что в вертикальной полосе между параллельными оси Oy прямыми $x=-a$ и $x=a$ нет точек, удовлетворяющих уравнению гиперболы.

Так же как и для эллипса оси координат служат осями симметрии гиперболы, так как переменные входят только в чётных степенях. Поэтому достаточно построить ту часть гиперболы, которая расположена в первой четверти, а именно

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad x\geq a.$$

При $x=a \Rightarrow y=0$, при неограниченном возрастании переменной x переменная величина y тоже неограниченно возрастает, т.е. кривая уходит на бесконечность, но при этом всё ближе подходит к прямой $y=\frac{b}{a}x$.

Такие прямые, к которым неограниченно приближаются уходящие в бесконечность ветви кривых, называются *асимптотами* этих кривых. В силу симметрии гипербола имеет две асимптоты, их уравнения $y=\pm\frac{b}{a}x$. Теперь можно построить всю гиперболу. Отрезок $A_1A_2=2a$ называется *вещественной* осью гиперболы, а $B_1B_2=2b$ – *мнимой* осью.

Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы, а начало координат – её центром.

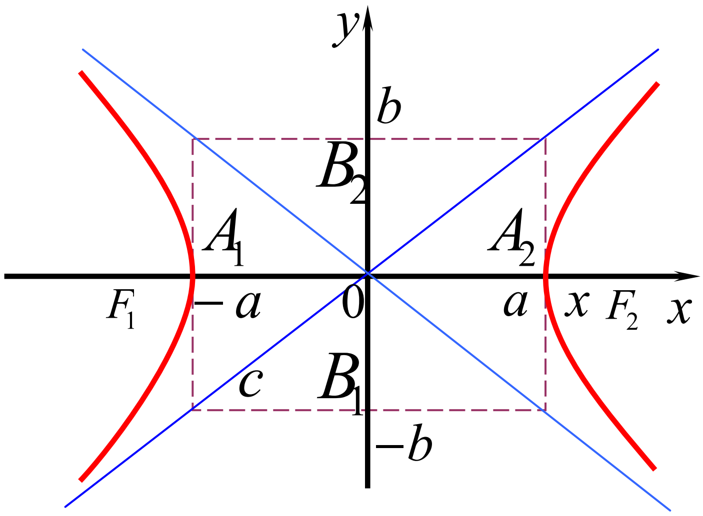

Рис.8

Форма гиперболы зависит от угла наклона асимптоты к вещественной оси, т.е. от величины отношения $\frac{b}{a}$. Чем эта величина меньше, тем меньше угол между асимптотами, в котором заключена гипербола его, и поэтому тем более сжата сама гипербола.

Так же как и в случае эллипса для характеристики формы гиперболы пользуются понятием *эксцентриситета*

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\ .$$

Так как у гиперболы $c > a$, то её эксцентриситет $\varepsilon > 1$.

При $b = a$ получаем гиперболу с уравнением $x^2 - y^2 = a^2$, которую называют <u>равнобочной</u> или равносторонней.

Если отнести равнобочную гиперболу к асимптотам, т.е. взять за оси координат её асимптоты, то гипербола примет вид

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}.$$

Парабола.

Определение.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки $\boldsymbol{F}$ (её называют фокусом параболы) и заданной прямой (её называют директрисой).

Если ось абсцисс совпадает с перпендикуляром, опущенным из фокуса на директрису, а начало координат делит этот перпендикуляр пополам, то каноническое уравнение параболы имеет вид

$$\boldsymbol{y}^2 = 2\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}.$$

Ось абсцисс является осью симметрии параболы.

Построим параболу по этому уравнению. При $\boldsymbol{p} > 0$ вся парабола расположена справа от оси $\boldsymbol{O}\boldsymbol{y}$, так как левая часть уравнения всегда положительна (рис. 9)

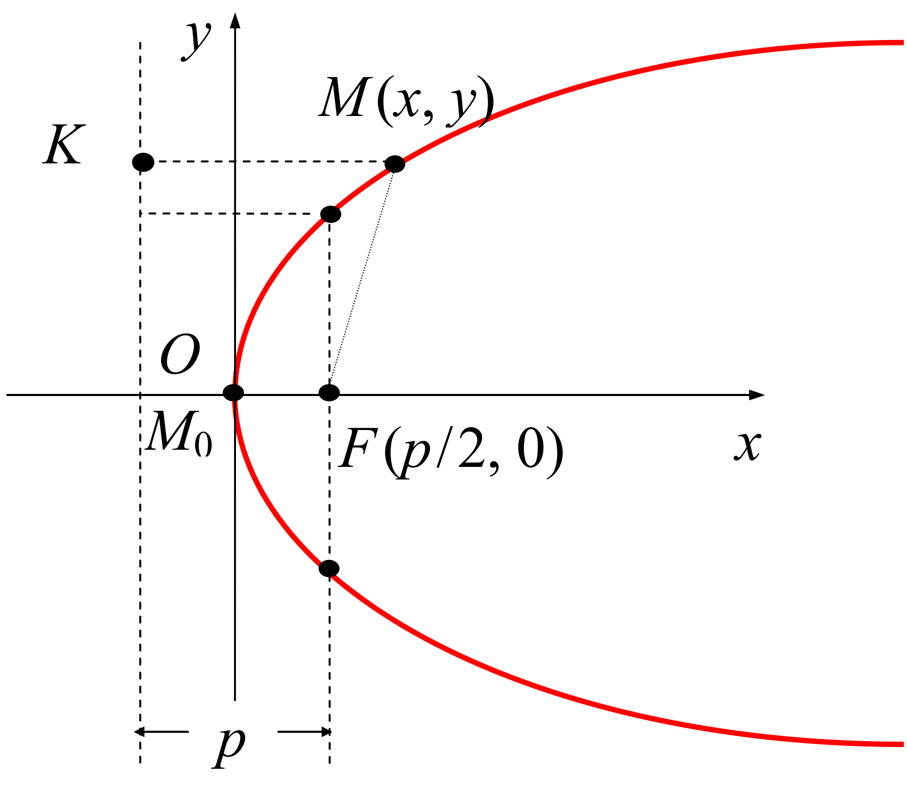

Рис. 9

Так как в уравнение переменная y входит только в чётной степени, то ось Ox является осью симметрии параболы.

Начало координат принадлежит параболе и называется её *вершиной*. В первой четверти имеем возрастающую функцию $y=\sqrt{2px}$. Параметр p регулирует раствор ветвей параболы, а знак этого параметра указывает направление её ветвей.

Вид параболы $y=ax^2$ хорошо известен из школьного курса математики (здесь ось Oy является осью симметрии). Эксцентриситет параболы $\varepsilon=\dfrac{MK}{MF}=1$ – отношение расстояния от произвольной точки параболы до директрисы к расстоянию от этой точки до фокуса.

Преобразование координат.

Преобразованием координат называется переход от одной системы координат к другой. Обычно целью такого преобразования координат является переход к такой системе, в которой уравнение заданной линии становится каноническим.

Формулы, позволяющие по координатам точки в одной системе координат определить её координаты в другой системе, называются <u>формулами преобразования координат</u>.

Переход от одной системы координат на плоскости можно подразделить на два этапа: параллельный перенос осей координат и поворот осей координат (можно и в обратном порядке).

Параллельный перенос осей координат.

Формулы преобразования координат при параллельном переносе осей от системы xOy к системе $x'O'y'$ имеют вид

$x = x' + x_0$; $y = y' + y_0$, где x, y – координаты точки в системе xOy; x', y' – её координаты в системе $x'O'y'$; x_0, y_0 – координаты нового начала координат O' в системе координат xOy. (рис. 10).

Формулы обратного преобразования, т.е. преобразования координат к исходной системе, имеют вид

$x' = x - x_0$; $y' = y - y_0$.

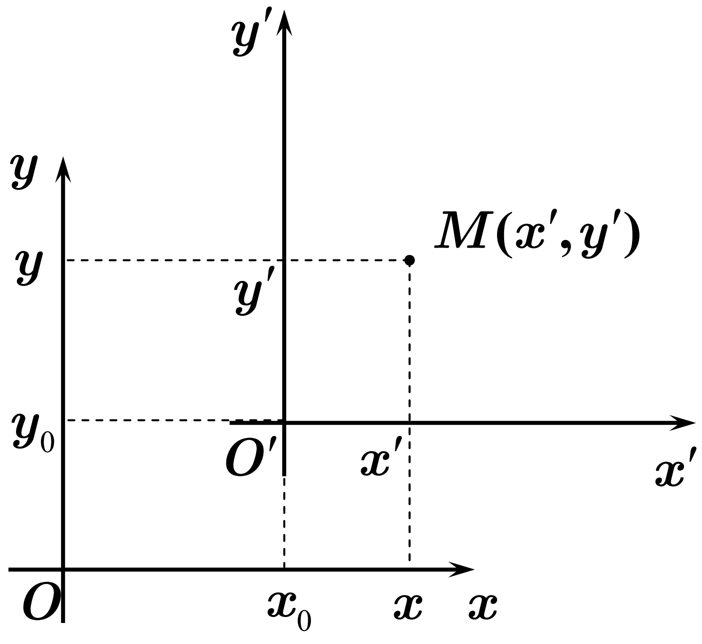

Рис. 10.

Поворот осей координат.

Поворотом координатных осей называется такое преобразование координат, при котором обе координатные оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат остается в той же точке плоскости (рис. 11).

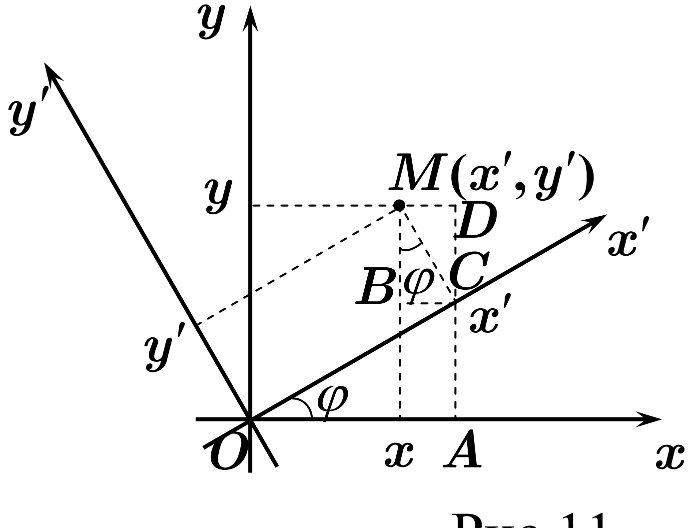

Рис.11.

Получим формулы преобразования координат при повороте. Пусть x, y – координаты произвольной точки M в исходной системе координат xOy; x', y' – координаты той же точки M в новой системе координат $x'Oy'$. φ – угол поворота осей, т.е. угол, на который надо повернуть старую ось Ox до её совмещения с новой осью Ox' (φ считается положительным при повороте против часовой стрелки и отрицательным, при повороте по часовой стрелке).

$x = OA - BC$, $OA = x'\cos\varphi$, $BC = MC\cdot\sin\varphi$, $MC = y' \Rightarrow x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$.

$y = AC + CD = AC + BM$, $AC = x'\sin\varphi$,

$BM = MC\cdot\cos\varphi = y'\cos\varphi \Rightarrow y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$.

Таким образом, формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi; \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

Чтобы совершить обратный переход к системе координат xOy, необходимо повернуть координатные оси на угол $(-\varphi)$.

Обратное преобразование определится формулами

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi; \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду

Уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

называется общим уравнением II порядка, если хотя бы один из коэффициентов *A, B, C* отличен от нуля.

Обозначим $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа, если $\delta > 0$, гиперболического типа, если $\delta < 0$, параболического типа, если $\delta = 0$. Если $\Delta \neq 0$, то уравнение (1) задает невырожденную кривую.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

Решение. Сначала сделаем поворот осей, воспользовавшись формулами

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi; \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

$$5(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 +$$
$$+4(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) +$$
$$+8(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 -$$
$$-32(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) - 56(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + 80 = 0;$$
$$5(x')^2\cos^2\varphi - 10x'y'\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$+5(y')^2\sin^2\varphi + 4(x')^2\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$+4x'y'\cos^2\varphi - 4x'y'\sin^2\varphi - 4(y')^2\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$+8(x')^2\sin^2\varphi + 16x'y'\sin\varphi\cos\varphi + 8(y')^2\cos^2\varphi -$$
$$-32x'\cos\varphi + 32y'\sin\varphi -$$

$$-56x'\sin\varphi - 56y'\cos\varphi + 80 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$(5\cos^2\varphi + 8\sin^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi)(x')^2 +$$
$$+(6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi)x'y' +$$
$$+(5\sin^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\cos^2\varphi)(y')^2 -$$
$$-(32\cos\varphi + 56\sin\varphi)x' +$$
$$+(32\sin\varphi - 56\cos\varphi)y' + 80 = 0.$$

Выберем угол поворота φ так, чтобы коэффициент при $x'y'$ оказался равным нулю:

$$6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi = 0.$$

Так как случай, когда $\cos\varphi = 0$, не является решением полученного для φ уравнения, разделим это уравнение на $\cos^2\varphi$:

$$6\,\mathrm{tg}\,\varphi - 4\,\mathrm{tg}^2\varphi + 4 = 0; \qquad 2\,\mathrm{tg}^2\varphi - 3\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2 = 0;$$

$$(\mathrm{tg}\,\varphi)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = 2; -1/2.$$

Выберем угол поворота $\varphi \in (0;\ \pi/2)$, тогда $\varphi = \mathrm{arctg}\,2$. Известно, что

$$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Так как $\varphi \in (0;\ \pi/2)$, то $\sin\varphi \geq 0$ и $\cos\varphi \geq 0$. Вычислим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$:

$$\sin^2\varphi = \frac{2^2}{1+2^2} = \frac{4}{5}; \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5};$$

$$\sin\varphi = 2/\sqrt{5}; \qquad \cos\varphi = 1/\sqrt{5}.$$

Подставив найденные для $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ значения в преобразованное уравнение, получим

$$\left(5\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{4}{5}\right)(\boldsymbol{x}')^2+0\cdot\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'+$$

$$+\left(5\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{1}{5}\right)(\boldsymbol{y}')^2-$$

$$-\left(32\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+56\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{x}'+\left(32\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-56\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\boldsymbol{y}'+80=0;$$

$$9\left((\boldsymbol{x}')^2-\frac{16}{\sqrt{5}}\boldsymbol{x}'\right)+4\left((\boldsymbol{y}')^2+\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{y}'\right)+80=0.$$

$$9\left(\boldsymbol{x}'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-9\cdot\frac{64}{5}+4\left(\boldsymbol{y}'+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{5}+80=0$$

Теперь осуществим параллельный перенос осей, преобразовав полученное уравнение к виду

$$9\left(\boldsymbol{x}'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\boldsymbol{y}'+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=36,$$

где $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}''+8/\sqrt{5}$; $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{y}''-1/\sqrt{5}$, точка O в системе $\boldsymbol{x}''\boldsymbol{O}'\boldsymbol{y}''$ будет иметь координаты $\boldsymbol{O}(-8/\sqrt{5};\ 1/\sqrt{5})$, в новой системе координат уравнение примет вид $(\boldsymbol{x}'')^2/4+(\boldsymbol{y}'')^2/9=1$. Построим эллипс в системе координат $\boldsymbol{x}''\boldsymbol{O}'\boldsymbol{y}''$, затем последовательно выполним обратный переход параллельным переносом осей к системе координат $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{O}\boldsymbol{y}'$ и обратный поворот осей к системе xOy (рис. 12).

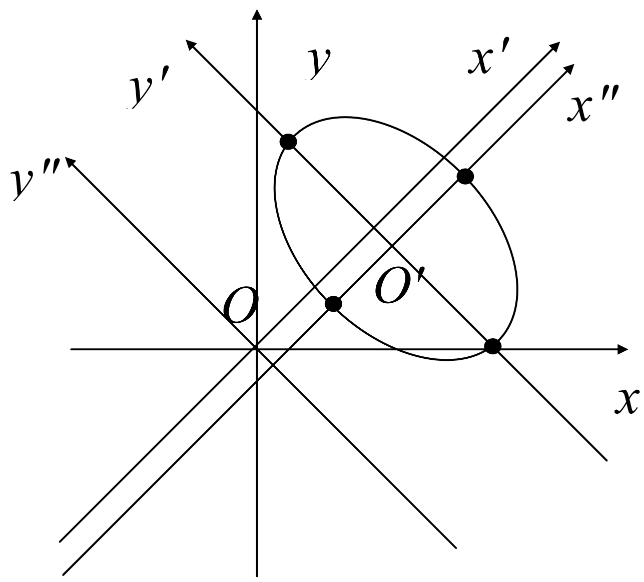

Рис. 12